-------- Click on the --------
Download Link
To view the complete book

परिशिष्ट 1

गणित में उपपत्तियाँ (Proofs in Mathematics)

© NCERT not to be republished

❖*Proofs are to Mathematics what calligraphy is to poetry. Mathematical works do consist of proofs just as poems do consist of characters*
— VLADIMIR ARNOLD ❖

A.1.1 भूमिका (Introduction)

कक्षा IX, X तथा XI में हम कथन, संयुक्त कथन, कथन के निषेधन, विलोम तथा प्रतिधनात्मक स्वरूप और अभिगृहीत, अनुमानित कथन, साध्य तथा निगमनात्मक विवेचन की संकल्पनाओं के बारे में पढ़ चुके हैं।

यहाँ हम गणितीय साध्यों को सिद्ध (प्रमाणित) करने की विभिन्न विधियों पर विचार करेंगे।

A.1.2 उपपत्ति क्या है? (What is a Proof?)

किसी गणितीय कथन की उपपत्ति में कथनों का एक अनुक्रम अंतर्विष्ट होता है, जिसके प्रत्येक कथन के औचित्य को किसी परिभाषित पद या किसी अभिगृहीत या किसी ऐसी साध्य द्वारा प्रमाणित करते हैं, जिसे निगमनिक विधि तथा कुछ अपरिभाषित पदों द्वारा केवल स्वीकार्य तार्किक नियमों का प्रयोग करके पूर्व प्रतिपादित किया जा चुका हो।

इस प्रकार प्रत्येक उपपत्ति निगमनिक तर्कों की एक शृंखला होती है, जिनमें से प्रत्येक की अपनी परिकल्पनाएँ तथा निष्कर्ष होते हैं। अधिकतर हम किसी साध्य को उसमें दिए हुए तथ्यों से प्रत्यक्ष रीति द्वारा सिद्ध करते हैं। परंतु कभी-कभी साध्य को सीधे सिद्ध करने की अपेक्षा उसके समतुल्य साध्य को सिद्ध करना आसान होता है। इस प्रकार किसी साध्य को सिद्ध करने की दो विधियाँ प्रदर्शित होती हैं, नामतः प्रत्यक्ष उपपत्ति अथवा अप्रत्यक्ष उपपत्ति तथा इसके अतिरिक्त प्रत्येक विधि में तीन भिन्न-भिन्न तरीके होते हैं, जिनकी चर्चा नीचे की गई है।

प्रत्यक्ष उपपत्ति यह साध्य की वह उपपत्ति है, जिसे हम सीधे रुप में प्रदत्त तथ्यों से प्रारंभ कर साध्य की उपपत्ति स्थापित करते हैं।

(i) **सीधा-सीधा उपगमन (Approach)** यह तर्कों की एक शृंखला है, जो प्रदत्त अथवा कल्पित तथ्यों से सीधे प्रारंभ करके, अभिगृहीतों, परिभाषित पदों तथा पूर्व प्रमाणित साध्यों की सहायता से तर्क के नियमों के प्रयोग द्वारा, सिद्ध किए जाने वाले निष्कर्ष को प्रमाणित करती है।

निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए:

उदाहरण 1 यदि $x^2 - 5x + 6 = 0$ तो $x = 3$ या $x = 2$ है।

हल $x^2 - 5x + 6 = 0$ (दिया है)

$\Rightarrow$ $(x-3)(x-2) = 0$ (एक व्यंजक को तुल्य व्यंजक से बदलने पर)

$\Rightarrow$ $x - 3 = 0$ या $x - 2 = 0$ (पूर्वप्रमाणित साध्य $ab = 0$ तब $a = 0$ या $b = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$ द्वारा)

$\Rightarrow$ $x - 3 + 3 = 0 + 3$ या $x - 2 + 2 = 0 + 2$ (समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने से उसकी प्रकृति परिवर्तित नहीं होती है।)

$\Rightarrow$ $x + 0 = 3$ या $x + 0 = 2$ (योग के अंतर्गत पूर्णांक के तत्समक(Identity) गुण के प्रयोग द्वारा)

$\Rightarrow$ $x = 3$ या $x = 2$ (योग के अंतर्गत पूर्णांक के तत्समक गुण के प्रयोग द्वारा।)

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ या $x = 2$

यहाँ p प्रदत्त कथन "$x^2 - 5x + 6 = 0$" है और q निष्कर्ष कथन "$x = 3$ या $x = 2$" है।

कथन p के व्यंजक $x^2 - 5x + 6$ को, इसके तुल्य एक अन्य व्यंजक $(x-3)(x-2)$ से प्रतिस्थापित कर के हम एक व्यंजक r: "$(x-3)(x-2) = 0$" प्राप्त करते हैं

यहाँ दो प्रश्न उठते हैं:

(i) व्यंजक $(x-3)(x-2)$ किस प्रकार व्यंजक $x^2 - 5x + 6$ के समान (तुल्य) है ?

(ii) किसी व्यंजक को उसके समान एक अन्य व्यंजक से हम कैसे प्रतिस्थापित कर सकते हैं ? इनमें से प्रथम को हम पिछली कक्षाओं में गुणनखंड द्वारा सिद्ध कर चुके हैं अर्थात्

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x-3) - 2(x-3) = (x-3)(x-2)$$

द्वितीय प्रश्न तर्क के वैध रूप (तर्क के नियमों) द्वारा संभव होता है।

इसके उपरांत r पूर्वकथन (Premise) या प्रदत्त कथन हो जाता है, जिससे कथन s: "$x - 3 = 0$ या $x - 2 = 0$" प्राप्त होता है। प्रत्येक चरण (steps) का औचित्य कोष्ठक (brackets) में दिया है।

यह प्रक्रिया निरंतर तब तक चलती रहती है जब तक हम अंतिम निष्कर्ष पर नहीं पहुँच जाते हैं।

तर्क की प्रतीकात्मक समतुल्यता निगमन द्वारा यह प्रमाणित करने में है कि $p \Rightarrow q$ सत्य है।

p से प्रारंभ करके निगमन द्वारा $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow \ldots \Rightarrow q$ को प्रमाणित कीजिए। अत: "$p \Rightarrow q$" सत्य है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 2 सिद्ध कीजिए की फलन $f: R \rightarrow R$ जो $f(x) = 2x + 5$ द्वारा परिभाषित है, एक एकैकी (one-one) फलन है

उपपत्ति ध्यान दीजिए कि फलन f एकैकी होगा यदि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(एकैकी फलन की परिभाषा)

अब मान लीजिए कि $f(x_1) = f(x_2)$ अर्थात् $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$

$\Rightarrow$ $2x_1 + 5 - 5 = 2x_2 + 5 - 5$ (दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने से)

$\Rightarrow$ $2x_1 + 0 = 2x_2 + 0$

$\Rightarrow$ $2x_1 = 2x_2$ (वास्तविक संख्याओं में योज्य तत्समक का गुण)

$\Rightarrow$ $\frac{2}{2}x_1 = \frac{2}{2}x_2$ (दोनों पक्षों को समान शून्येतर संख्या से विभाजित करने से)

$\Rightarrow$ $x_1 = x_2$

अत: फलन एकैकी है।

(ii) गणितीय आगमन

गणितीय आगमन, साध्यों को सिद्ध करने की एक ऐसी विधि है, जिसका स्वरूप निगमनिक होता है। इस विधि में उपपत्ति पूर्णरूपेण निम्नलिखित अभिगृहीत पर आधारित होती हैं।

N के एक प्रदत्त उपसमुच्चय S में, यदि

(i) प्राकृत संख्या $1 \in S$ तथा

(ii) प्राकृत संख्या $k + 1 \in S$ जब कभी $k \in S$, तो $S = \mathbf{N}$

गणितीय आगमन का सिद्धांत यह है कि यदि एक कथन "S(n), $n = 1$ के लिए सत्य है" (अथवा किसी अन्य प्रारंभिक संख्या j के लिए सत्य है) और यदि कथन $n = k$ के लिए सत्य होने में यह अंतर्निहित है कि वह $n = k + 1$ के लिए अनिवार्यत: सत्य है (जब कभी धन पूर्णांक $k \geq j$), तो प्रदत्त कथन किसी भी धन पूर्णांक n, जहाँ $n \geq j$ के लिए सत्य होता है।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, तो दिखाइए कि $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

हल मान लिया कि $P(n) : A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

-------- Click on the --------
Download Link
To view the complete book

हम देखते हैं कि $$P(1) : A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

अतः P(1) सत्य है।

अब मान लिया कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात्

$$P(k) : A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

तो हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है, अर्थात्

$$P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix} \text{ सत्य है}$$

पुनः $$A^{k+1} = A^k \,.\, A$$

चूँकि $P(k)$ सत्य है, इसलिए

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta & \cos k\theta\sin\theta + \sin k\theta\cos\theta \\ -\sin k\theta\cos\theta - \cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta + \cos k\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

(आव्यूह गुणन द्वारा)

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

अतः $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अतएव $P(n)$, n के सभी मानों (धन पूर्णांक) के लिए सत्य है।

(iii) विभिन्न स्थितियों में विखंडन द्वारा अथवा निःशेषण द्वारा उपपत्ति

कथन $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने की यह विधि केवल तभी संभव है, जब p को अनेक कथनों r, s, t (मान लिया) में विखंडित किया जा सकता हो जैसा कि $p = r \vee s \vee t$ (जहाँ "$\vee$" प्रतीक है "या" के लिए)

यदि सप्रतिबंध कथनों $r \Rightarrow q$;

$s \Rightarrow q$;

तथा $t \Rightarrow q$

© NCERT not to be republished

को प्रमाणित किया जाए, तो $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$, सिद्ध हो जाता है और इस प्रकार $p \Rightarrow q$ प्रमाणित होता है।

इस विधि में परिकल्पना की प्रत्येक संभव दशा को जाँचा जाता है। यह विधि व्यावहारिक रूप से केवल तभी सुविधाजनक है जब विखण्डन द्वारा प्राप्त कथनों की संख्या कम हो।

उदाहरण 4 किसी त्रिभुज ABC, में सिद्ध कीजिए कि

$$a = b \cos C + c \cos B$$

हल मान लीजिए कि p कथन "ABC एक त्रिभुज है" तथा q कथन

"$a = b \cos C + c \cos B$" है

मान लीजिए कि ABC एक त्रिभुज है। शीर्ष A से BC (आवश्यकतानुसार बढ़ाई गई) पर लंब AD खींचिए।

हमें ज्ञात है कि एक त्रिभुज या तो न्यूनकोण त्रिभुज या अधिककोण त्रिभुज या समकोण त्रिभुज होता है, इसलिए हम p को r, s तथा t में विखण्डित कर सकते हैं, जहाँ

r : ABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C$ न्यूनकोण हैं।

s : ABC एक अधिककोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C$ अधिककोण है।

t : ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C$ समकोण है।

अतः हम साध्य को उपर्युक्त तीनों संभावनाओं के लिए अलग-अलग सिद्ध करते हैं।

दशा (i) जब $\angle A, \angle B$, तथा $\angle C$ तीनों ही न्यूनकोण हैं (आकृति A1.1)

समकोण त्रिभुज ADB, द्वारा

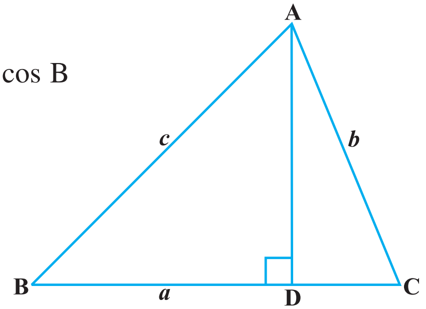
$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

अर्थात् $$BD = AB \cos B = c \cos B$$

समकोण त्रिभुज ADC द्वारा

$$\frac{CD}{AC} = \cos C$$

अर्थात् $$CD = AC \cos C = b \cos C$$



आकृति A1.1

अब $$a = BD + CD = c \cos B + b \cos C \qquad \ldots (1)$$