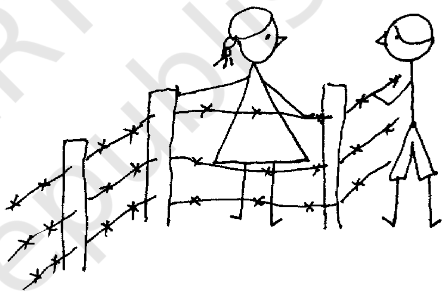
परिशिष्ट 1

गणित में उपपत्तियाँ

A1.1 भूमिका



मान लीजिए आपके परिवार के पास एक भूखंड है, परन्तु उसके चारों ओर कोई बाड़ (fence) नहीं बनी है। एक दिन आपके पड़ोसी ने अपने भूखंड के चारों ओर बाड़ (fence) बनाने का निर्णय लिया। जब पड़ोसी ने बाड़ बना ली, तब आपको पता चला कि बाड़ के अंदर आपके परिवार के भूखंड का कुछ भाग चला गया है। आप अपने पड़ोसी को कैसे सिद्ध करेंगे कि उसने आपके भूखंड के कुछ भाग पर कब्जा करने की कोशिश की है। इस संबंध में आपका पहला काम परिसीमा वाले विवाद को सुलझाने के लिए गाँव के बुजर्गों से सहायता लेना हो सकता है। परन्तु, मान लीजिए कि इस मामले में बुजुर्गों के अलग-अलग मत हैं। कुछ बुजुर्ग आपके दावे को सही मानते हैं और कुछ आपके पड़ोसी के दावे को सही मानते हैं। तब, ऐसी स्थिति में आप क्या करेंगे? इस संबंध में आपके सामने केवल यही विकल्प रह जाता है कि अपने भूखंड की परिसीमाओं पर अपने दावे को स्थापित करने के लिए आप एक ऐसी विधि निकालें जो कि सभी को स्वीकार्य हो। उदाहरण के लिए, अपने दावे को सही सिद्ध करने और अपने पड़ोसी के दावे को गलत सिद्ध करने के लिए, आप यदि आवश्यक हुआ तो न्यायालय में, सरकार द्वारा अनुमोदित अपने गाँव के सर्वेक्षण मानचित्र का प्रयोग कर सकते हैं।

आइए अब हम एक अन्य स्थिति पर विचार करें। मान लीजिए आपकी माँ ने अगस्त महीने, 2005 का घर की बिजली के बिल का भुगतान कर दिया है। परन्तु सितंबर, 2005 के बिल में यह दर्शाया गया है कि अगस्त के बिल का भुगतान नहीं किया गया है। बिजली विभाग द्वारा किए गए इए दावे को आप किस प्रकार गलत सिद्ध करेंगे? इसके लिए आपको भुगतान बिल रसीद प्रस्तुत करनी होगी, जो यह सिद्ध कर देगी कि अगस्त महीने के बिल का भुगतान किया जा चुका है।

ऊपर के उदाहरणों से यह पता चलता है कि हमें अपने दैनिक जीवन में प्रायः यह सिद्ध करना होता है कि अमुक कथन या दावा सत्य है या असत्य। फिर भी, ऐसे अनेक कथन होते हैं जिन्हें सिद्ध किए बिना ही हम स्वीकार कर लेते हैं। परन्तु, गणित में हम किसी कथन को सत्य या असत्य केवल तभी स्वीकार करते हैं (कुछ अभिगृहीतों को छोड़कर) जब गणित के तर्क के अनुसार इस कथन को सिद्ध कर दिया गया हो।

वस्तुतः, गणित में उपपत्तियों का अस्तित्व हजारों वर्षों से रहा है और ये गणित की किसी भी शाखा के केंद्र होती हैं। ऐसा विश्वास किया जाता है कि पहली ज्ञात उपपत्ति (proof) एक यूनानी दार्शनिक और गणितज्ञ थेल्स ने प्रस्तुत की थी। यूँ तो मेसोपोटामिया, मिस्र, चीन और भारत जैसी अनेक प्राचीन सभ्यताओं में गणित केंद्रित है, फिर भी इस बात का कोई स्पष्ट प्रमाण नहीं मिलता है कि उन्होंने उपपत्तियों का प्रयोग उस प्रकार किया था जिस प्रकार आज हम करते हैं।

इस अध्याय में, हम देखेंगे कि कथन क्या होते हैं, गणित में किस प्रकार तर्क दिया जाता है और एक गणितीय उपपत्ति में क्या-क्या अवयव निहित होते हैं।

A1.2 गणितीय रूप से स्वीकार्य कथन

इस अनुच्छेद में, हम गणितीय रूप से स्वीकार्य कथन (mathematically acceptable statement) के अर्थ की व्याख्या करने का प्रयास करेंगे। 'कथन' वह वाक्य है जो न तो आदेश सूचक वाक्य होता है और न ही विस्मयादि बोधक (exclamatry) वाक्य। निःसंदेह, कथन एक प्रश्न भी नहीं है! उदाहरण के लिए,

"आपके बालों का रंग क्या है?" यह एक कथन नहीं है। यह एक प्रश्न है।

"कृपया जाइए और मेरे लिए पानी लाइए" एक अनुरोध या एक आदेश है। यह एक कथन नहीं है।

"कितना मनमोहक सूर्यास्त है !" एक *विस्मयादि बोधक* टिप्पणी है। यह एक कथन नहीं है।

फिर भी, "आपके बालों का रंग काला है" एक कथन है।

सामान्यतः, कथन निम्नलिखित प्रकारों में से एक हो सकता है:

- *सदैव सत्य* (*always true*)
- *सदैव असत्य* (*always false*)
- *संदिग्ध* (*ambiguous*)

यहाँ शब्द "संदिग्ध" की कुछ व्याख्या कर देना आवश्यक है। ऐसी दो स्थितियाँ होती हैं जिनसे कथन संदिग्ध बन जाता है। पहली स्थिति तो वह होती है जबकि हम यह निर्णय नहीं ले पाते कि कथन सदैव सत्य है या सदैव असत्य है। उदाहरण के लिए, "कल गुरुवार है" संदिग्ध है, क्योंकि संदर्भ में इतना कुछ नहीं बताया गया है, जिससे हम यह निर्णय ले सकें कि कथन सत्य है या असत्य।

संदिग्धता की दूसरी स्थिति तब उत्पन्न होती है जब कथन व्यक्तिपरक (subjective) होता है। अर्थात् कुछ व्यक्तियों के लिए यह सत्य होता है और अन्य व्यक्तियों के लिए असत्य होता है। उदाहरण के लिए, "कुत्ते बुद्धिमान होते हैं" संदिग्ध कथन है, क्योंकि कुछ लोग इसे सत्य मानते हैं और कुछ इसे सत्य नहीं मानते हैं।

उदाहरण 1 : बताइए कि निम्न कथनों में कौन-कौन से कथन सदैव सत्य हैं, सदैव असत्य हैं या संदिग्ध हैं। अपने उत्तर की कारण सहित पुष्टि कीजिए।

(i) एक सप्ताह में आठ दिन होते हैं।

(ii) यहाँ वर्षा हो रही है।

(iii) पश्चिम में सूर्यास्त होता है।

(iv) गौरी एक दयालु लड़की है।

(v) दो विषम पूर्णांकों का गुणनफल सम होता है।

(vi) दो सम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सम होता है।

हल :

(i) कथन सदैव असत्य है, क्योंकि एक सप्ताह में 7 दिन होते हैं।

(ii) यह कथन संदिग्ध है, क्योंकि यह स्पष्ट नहीं है कि यहाँ कहाँ है।

(iii) कथन सदैव सत्य है। हम कहीं भी रहते हों, सूर्यास्त पश्चिम में ही होता है।

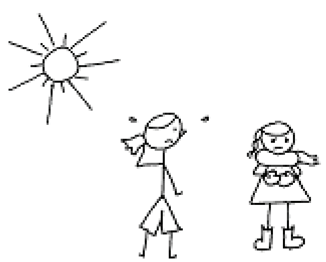
(iv) कथन संदिग्ध है, क्योंकि यह व्यक्तिपरक है। कुछ लोगों के लिए गौरी दयालु हो सकती है और अन्य लोगों के लिए नहीं।

(v) कथन सदैव असत्य है। दो विषम पूर्णांकों का गुणनफल सदैव विषम होता है।

(vi) यह कथन सदैव सत्य है। फिर भी इस बात की पुष्टि करने के लिए कि यह सत्य है, हमें कुछ और करने की आवश्यकता होगी। इसे *अनुच्छेद* A1.4 में सिद्ध किया जाएगा।

जैसा कि पहले बताया जा चुका है कि अपने दैनिक जीवन में हम कथनों की मान्यता के प्रति अधिक सावधान नहीं रहते। उदाहरण के लिए, मान लीजिए आपकी सहेली आपको यह बताती है कि केरल के मनंतावड़ी में जुलाई के महीने में प्रतिदिन वर्षा होती है। पूर्ण विश्वास के साथ आप उसके इस कथन को सत्य मान लेंगी, यद्यपि यह संभव है कि जुलाई के महीने में एक या दो दिन वर्षा न भी हुई हो और, यदि आप वकील नहीं हैं, तो आप उससे बहस नहीं करेंगी।

एक अन्य उदाहरण के रूप में कुछ ऐसे कथन लीजिए, जिन्हें हम प्राय: एक दूसरे से कहते रहते हैं जैसे "आज बहुत गर्मी है।" हम ऐसे कथनों को सरलता से स्वीकार कर लेते हैं, क्योंकि हम संदर्भ जानते हैं, यद्यपि ये कथन संदिग्ध हैं। "आज बहुत गर्मी है" का अर्थ अलग-अलग लोगों के लिए अलग-अलग हो सकता है, क्योंकि कुमायूँ के व्यक्ति के लिए जो मौसम बहुत गर्म होगा, वह चैन्नई के व्यक्ति के लिए गर्म नहीं भी हो सकता है।



परन्तु गणितीय कथन संदिग्ध नहीं हो सकता है। *गणित में कथन केवल स्वीकार्य या मान्य* (*valid*) *होता है, जबकि वह या तो सत्य हो या असत्य हो।* जब यह सदैव सत्य होता है, तब हम कहते हैं कि यह एक *सत्य कथन* (true statement) है अन्यथा कथन असत्य होता है।

उदाहरण के लिए, $5 + 2 = 7$ सदैव सत्य है। अत: '$5 + 2 = 7$' एक सत्य कथन है। $5 + 3 = 7$ असत्य है। अत: '$5 + 3 = 7$' एक असत्य कथन है।

उदाहरण 2 : बताइए कि नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य :

(i) एक त्रिभुज के अंत:कोणों का योग $180°$ होता है।

(ii) 1 से बड़ी प्रत्येक विषम संख्या अभाज्य होती है।

(iii) किसी भी वास्तविक संख्या x के लिए $4x + x = 5x$ होता है।

(iv) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए $2x > x$ होगा।

(v) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए $x^2 \geq x$ होगा।

(vi) यदि एक चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर हों, तो वह एक वर्ग होता है।

हल :

(i) यह कथन सत्य है। आप इसे अध्याय 6 में सिद्ध कर चुके हैं।

(ii) यह कथन असत्य है। उदाहरण के लिए 9 एक अभाज्य संख्या नहीं है।

(iii) यह कथन सत्य है।

(iv) यह कथन असत्य है। उदाहरण के लिए, $2 \times (-1) = -2$, और -2, -1 से बड़ा नहीं है।

(v) यह कथन असत्य है। उदाहरण के लिए, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, और $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ से बड़ा नहीं है।

(vi) यह कथन असत्य है; क्योंकि समचतुर्भुज की बराबर भुजाएँ तो होती हैं, परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि वह एक वर्ग है।

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि यह स्थापित करने के लिए कि गणित के अनुसार कथन सत्य नहीं है, हमें एक ऐसा उदाहरण या ऐसी स्थिति देनी होगी, जहाँ यह लागू नहीं होता। अत: (ii) में, क्योंकि 9 अभाज्य संख्या नहीं है, यह एक उदाहरण है जो यह दर्शाता है कि कथन "1 से बड़ी प्रत्येक विषम संख्या अभाज्य होती है", सत्य नहीं है। इस प्रकार का उदाहरण, जो कथन के अनुकूल न हो, *प्रत्युदाहरण* (*counter example*) कहलाता है। हम अनुच्छेद A1.5 में प्रत्युदाहरणों पर विस्तार से चर्चा करेंगे।

इस बात की ओर भी आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि यद्यपि कथन (iv), (v) और (vi) असत्य हैं, फिर भी इन पर कुछ प्रतिबंध लगाकर आप इन्हें सत्य बना सकते हैं।

उदाहरण 3 : उपयुक्त प्रतिबंध लगाकर निम्नलिखित कथनों को पुन: इस प्रकार लिखिए कि वे सत्य कथन हो जाएँ।

(i) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए $2x > x$ होगा।

(ii) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए $x^2 \geq x$ होगा।

(iii) यदि आप एक संख्या को स्वयं उसी संख्या से भाग दें, तो आपको सदैव ही 1 प्राप्त होगा।

(iv) वृत्त के एक बिंदु पर उसकी जीवा द्वारा अंतरित कोण $90°$ का होता है।

(v) यदि एक चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर हों, तो वह एक वर्ग होता है।

हल :

(i) यदि $x > 0$ हो, तो $2x > x$ होगा।

(ii) यदि $x \leq 0$ हो या $x \geq 1$ हो, तो $x^2 \geq x$ होगा।

(iii) यदि शून्य के अतिरिक्त किसी अन्य संख्या को स्वयं उसी संख्या से भाग दें, तो आपको सदैव 1 प्राप्त होगा।

(iv) वृत्त के एक बिंदु पर वृत्त के एक व्यास द्वारा अंतरित कोण $90°$ का होता है।

(v) यदि एक चतुर्भुज की सभी भुजाएँ और सभी अंत:कोण बराबर हों, तो वह एक वर्ग होता है।

प्रश्नावली A 1.1

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सदैव सत्य हैं, सदैव असत्य हैं या संदिग्ध हैं। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) एक वर्ष में 13 महीने होते हैं।

(ii) दीवाली शुक्रवार को पड़ रही है।

(iii) मगादी में तापमान $26°$ C है।

(iv) पृथ्वी का एक चन्द्रमा है।

(v) कुत्ते उड़ सकते हैं।

(vi) फरवरी में केवल 28 दिन होते हैं।

2. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। कारण सहित उत्तर दीजिए।

(i) एक चतुर्भुज के अंत:कोणों का योग $350°$ होता है।

(ii) किसी भी वास्तविक संख्या x के लिए $x^2 \geq 0$ है।

(iii) समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है।

(iv) दो सम संख्याओं का योग सम होता है।

(v) दो विषम संख्याओं का योग विषम होता है।