

----- Click on the -----  
**Download Link**  
To view the complete book

# गणितीय उपपत्तियाँ **A1**

## A1.1 भूमिका

हमारे दैनिक जीवन में तर्क प्रस्तुत करने और स्पष्ट चिंतन करने की क्षमता अत्यधिक उपयोगी होती है। उदाहरण के लिए मान लीजिए एक राजनीतिज्ञ आप से यह कहता है कि 'यदि आप साफ-सुथरी सरकार चाहते हैं तो आपको मुझे वोट देना चाहिए।' वास्तव में आपके अंदर वह यह विश्वास पैदा करना चाहता है कि यदि आपने उसे वोट नहीं दिया, तो आपको साफ-सुथरी सरकार नहीं मिल सकती है। इसी प्रकार, यदि एक विज्ञापन में यह बताया जाता है कि 'बुद्धिमान व्यक्ति XYZ प्रकार के जूते पहनते हैं' तो कंपनी आपके अंदर यह बात पैदा करना चाहती है कि यदि आप XYZ प्रकार के जूते नहीं पहनते हैं, तो आप एक बुद्धिमान व्यक्ति नहीं हैं। आप स्वयं यह देख सकते हैं कि ऊपर दिए गए दोनों ही कथन आम जनता को बहका सकते हैं। अतः यदि हम तर्क प्रस्तुत करने की प्रक्रिया को सही प्रकार से समझते हैं, तो अनजाने में हम इस प्रकार के जाल में नहीं फँस सकते हैं।

तर्क प्रस्तुत करने का सही प्रयोग गणित का आधार है, विशेष रूप से उपपत्तियाँ प्रस्तुत करने में। कक्षा IX में, आपको उपपत्तियों की संकल्पना से परिचित कराया गया है और वास्तव में आपने अनेक कथनों, विशेष रूप से ज्यामिति के कथनों को सिद्ध भी किया है। स्मरण कीजिए कि एक उपपत्ति में अनेक गणितीय कथन होते हैं, जिनमें से प्रत्येक कथन उपपत्ति के पिछले कथन से या पहले सिद्ध किए गए प्रमेय से, या किसी अभिगृहीत से, या परिकल्पनाओं से तार्किक रूप से निगमित होता है। उपपत्ति की रचना में प्रयुक्त होने वाला हमारा मुख्य साधन निगमनिक तर्कण की प्रक्रिया है।

इस अध्याय में हम सबसे पहले इस बात पर पुनर्विचार करेंगे कि गणितीय कथन क्या होता है। इसके बाद हम अनेक उदाहरणों द्वारा निगमनिक तर्कण देने के कौशल को और

अधिक सक्षम बनाने पर विचार करेंगे। यहाँ हम निषेध की संकल्पना और एक दिए हुए कथन का निषेध ज्ञात करने के बारे में भी चर्चा करेंगे। इसके बाद हम इस बात की चर्चा करेंगे कि किसी दिए हुए कथन का विलोम ज्ञात करने का अर्थ क्या होता है। अंत में, हम अनेक प्रमेयों की उपपत्तियों का विश्लेषण करके कक्षा IX में पढ़ी गई किसी उपपत्ति के अवयवों पर पुनर्विचार करेंगे। यहाँ हम विरोधोक्ति (अंतर्विरोध) द्वारा उपपत्ति की धारणा पर भी विचार करेंगे, जिसे आप कक्षा IX में सीख चुके हैं तथा इस पुस्तक के अनेक अन्य अध्यायों में भी प्रयोग कर चुके हैं।

## A1.2 गणितीय कथनों का पुनरीक्षण

स्मरण कीजिए कि 'कथन' एक अर्थपूर्ण वाक्य होता है, जो न तो आदेश होता है, न विस्मयादिबोधक (exclamation) होता है और न ही प्रश्न होता है। उदाहरण के लिए 'वर्ल्ड कप के फाइनल में कौन-सी दो टीमों खेल रही हैं?' एक प्रश्न है, एक कथन नहीं है। 'जाइए और अपना गृहकार्य पूरा कीजिए', एक आदेश है, एक कथन नहीं है। 'क्या ही बढ़िया गोल है!' एक विस्मयादिबोधक है, एक कथन नहीं है।

स्मरण रहे कि व्यापक रूप में वाक्य निम्नलिखित में से कोई एक हो सकता है:

- सत्य
- असत्य
- संदिग्ध

कक्षा IX में, आप यह भी पढ़ चुके हैं कि गणित में, कथन केवल तभी स्वीकार्य होता है जबकि वह या तो सत्य हो या असत्य हो। अतः संदिग्ध वाक्यों को गणितीय कथन नहीं माना जाता है।

आइए हम कुछ उदाहरण लेकर अपने ज्ञान को दोहरा लें।

**उदाहरण 1 :** बताइए कि निम्नलिखित वाक्य कथन है या नहीं है। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

- (i) सूर्य पृथ्वी की परिक्रमा करता है।
- (ii) वाहन के चार पहिए होते हैं।
- (iii) प्रकाश की चाल लगभग  $3 \times 10^8$  km/s है।
- (iv) नवंबर से मार्च तक कोलकाता की सड़क बंद रहेगी।
- (v) सभी मानव नश्वर होते हैं।

**हल :**

- (i) यह वाक्य असत्य है, क्योंकि खगोलविदों ने यह स्थापित कर दिया है कि पृथ्वी सूर्य की परिक्रमा करती है। अतः यह एक कथन है।
- (ii) यह वाक्य संदिग्ध है, क्योंकि हम यह निर्णय नहीं कर सकते हैं कि यह सत्य है या असत्य है। यह इस बात पर निर्भर करता है कि वाहन कौन-सा है, क्योंकि वाहन 2, 3, 4, 6, 10, आदि पहियों वाला हो सकता है। अतः यह एक कथन नहीं है।
- (iii) यह वाक्य सत्य है, जैसाकि भौतिकविदों ने सत्यापित किया है। अतः यह एक कथन है।
- (iv) यह वाक्य संदिग्ध है, क्योंकि यह स्पष्ट नहीं है कि यहाँ किस सड़क के बारे में कहा जा रहा है। अतः यह एक कथन नहीं है।
- (v) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि प्रत्येक मानव को कभी न कभी मरना ही है। अतः यह एक कथन है।

**उदाहरण 2 :** बताइए कि निम्नलिखित वाक्य सत्य हैं या असत्य हैं। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

- (i) सभी समबाहु त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज होते हैं।
- (ii) कुछ समद्विबाहु त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होते हैं।
- (iii) सभी समद्विबाहु त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होते हैं।
- (iv) कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक होती हैं।
- (v) कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक नहीं होती हैं।
- (vi) सभी पूर्णांक परिमेय संख्या नहीं होते हैं।
- (vii) किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के बीच एक भी परिमेय संख्या नहीं होती है।

**हल :**

- (i) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि समबाहु त्रिभुज की भुजाएँ समान होती हैं, अतः ये समद्विबाहु त्रिभुज हैं।
- (ii) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि वे समद्विबाहु त्रिभुज जिसके आधार कोण  $60^\circ$  के हैं, समबाहु त्रिभुज होते हैं।
- (iii) यह वाक्य असत्य है। इसका एक प्रत्युदाहरण दीजिए।
- (iv) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि  $\frac{p}{q}$  के रूप की ऐसी परिमेय संख्याएँ, जहाँ  $p$  पूर्णांक हैं और  $q = 1$ , पूर्णांक हैं। (उदाहरण के लिए  $3 = \frac{3}{1}$ )

- (v) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि  $\frac{p}{q}$  के रूप की ऐसी परिमेय संख्याएँ, जहाँ  $p, q$  पूर्णांक हैं और  $q, p$  को विभाजित नहीं करता, पूर्णांक नहीं हैं (उदाहरण के लिए  $\frac{3}{2}$ )
- (vi) यह वाक्य इस कथन के समान है कि 'एक ऐसा पूर्णांक है, जो परिमेय संख्या नहीं है'। यह वाक्य असत्य है, क्योंकि सभी पूर्णांक परिमेय संख्या होते हैं।
- (vii) यह वाक्य असत्य है। जैसाकि आप जानते हैं किन्हीं दो परिमेय संख्याओं  $r$  और  $s$  के बीच  $\frac{r+s}{2}$  होती हैं, जो एक परिमेय संख्या है।

**उदाहरण 3 :** यदि  $x < 4$  है तो निम्नलिखित कथनों में कौन से सत्य हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

(i)  $2x > 8$

(ii)  $2x < 6$

(iii)  $2x < 8$

**हल :**

- (i) यह कथन असत्य है, क्योंकि, उदाहरण के लिए,  $x = 3 < 4$ ,  $2x > 8$  को संतुष्ट नहीं करता है।
- (ii) यह कथन असत्य है, क्योंकि उदाहरण के लिए  $x = 3.5 < 4$ ,  $2x < 6$  को संतुष्ट नहीं करता है।
- (iii) यह कथन सत्य है, क्योंकि यह वही है जो कि  $x < 4$  है।

**उदाहरण 4 :** उपयुक्त प्रतिबंध लगाकर निम्नलिखित कथनों का पुनर्कथन दीजिए, जिससे कि वे कथन सत्य हो जाएँ?

- (i) यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो वह एक आयत होता है।
- (ii) किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।
- (iii) सभी धन पूर्णांक  $p$  के लिए  $\sqrt{p}$  अपरिमेय होता है।
- (iv) सभी द्विघात समीकरण के दो वास्तविक मूल होते हैं।

**हल :**

- (i) यदि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो वह एक आयत होता है।
- (ii) एक त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।

(iii) सभी अभाज्य संख्याओं  $p$  के लिए  $\sqrt{p}$  अपरिमेय होता है।

(iv) सभी द्विघात समीकरण के अधिक से अधिक दो वास्तविक मूल होते हैं।

**टिप्पणी :** ऊपर के कथनों का पुनःकथन अन्य प्रकार भी दिया जा सकता है। उदाहरण के लिए

(iii) का पुनःकथन ' $\sqrt{p}$  अपरिमेय है, जहाँ  $p$  ऐसा धन पूर्णांक है, जो पूर्ण वर्ग नहीं है।'

### प्रश्नावली A1.1

- बताइए कि निम्नलिखित वाक्य कथन हैं या नहीं। यदि कथन हैं, तो बताइए कि वे सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।
  - गणित की सभी पाठ्य पुस्तकें रोचक होती हैं।
  - पृथ्वी से सूर्य की दूरी लगभग  $1.5 \times 10^8$  km है।
  - सभी मानव वृद्ध हो जाते हैं।
  - उत्तरकाशी से हर्सिल की यात्रा थका देने वाली है।
  - महिला ने बाइनाकुलर से एक हाथी देखा।
- बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।
  - सभी षट्भुज बहुभुज होते हैं।
  - कुछ बहुभुज पंचभुज होते हैं।
  - सभी सम संख्याएँ 2 से भाज्य नहीं होती हैं।
  - कुछ वास्तविक संख्याएँ अपरिमेय होती हैं।
  - सभी वास्तविक संख्याएँ परिमेय नहीं होती हैं।
- मान लीजिए  $a$  और  $b$  वास्तविक संख्याएँ हैं, जहाँ  $ab \neq 0$  है, तब बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से कौन से सत्य हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।
  - $a$  और  $b$  दोनों अनिवार्यतः शून्य होने चाहिए।
  - $a$  और  $b$  दोनों शून्येतर होने चाहिए।
  - या तो  $a$  या  $b$  शून्येतर होना चाहिए।
- उपयुक्त प्रतिबंधों के साथ निम्नलिखित कथनों का ऐसा पुनःकथन दीजिए जिससे कि वे सत्य हो जाएँ।
  - यदि  $a^2 > b^2$ , तो  $a > b$
  - यदि  $x^2 = y^2$ , तो  $x = y$
  - यदि  $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ , तो  $x = 0$
  - चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।